



第9讲：三角函数公式化简 + 题型拓展 + 技巧衍生 (2)

题型一：二倍角+半角公式+降幂公式+三倍角公式

1. (2024 届九省联考) 已知 $\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, $\tan 2\theta = -4\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta + \sin 2\theta} = (\quad)$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

2. (2023·新高考 II) 已知 α 为锐角, $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} = (\quad)$

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$ C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

3. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$.





5. (2025·德阳模拟) 若关于 α 的方程 $\frac{\cos 2\alpha + 1 + m \sin 2\alpha}{m \cos 2\alpha + m - \sin 2\alpha} = \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha}$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上有且仅有一个实数解, 则实数 $m =$ _____.

6. (2025·莆田模拟) 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, $2\sin \alpha + \cos \alpha = 1$, 则 $\frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} =$ ()

A. 3

B. -3

C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

7. (2025·湖北模拟) 若 $(1 + \cos \frac{2\pi}{5}) \sin x = \sin \frac{2\pi}{5} \cos x$, 且 $x \in (0, \pi)$, 则 $x =$ ()

A. $\frac{\pi}{5}$ B. $\frac{3\pi}{10}$ C. $\frac{7\pi}{10}$ D. $\frac{4\pi}{5}$

8. (2024·江西八校联考) 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2(\sin \beta + \sin^2 \beta) = \frac{\sin 2\beta}{\tan \alpha}$, 则 $\tan(2\alpha + \beta + \frac{\pi}{6}) =$ ()

A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$ 



9. 化简 $\frac{\cos 40^\circ}{\cos 25^\circ \sqrt{1 - \sin 40^\circ}}$

10. 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{2} + \cos \alpha$, 且 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})}$ 的值为 _____.

11. 已知 $\tan x = a$, 则 $\frac{3\sin x + \sin 3x}{3\cos x + \cos 3x} =$ _____.

题型二: 辅助角公式

12. (2020·新课标III) 已知 $\sin \theta + \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$, 则 $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) =$ ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$





13. (2013·新课标 I) 设当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - 2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos \theta =$ _____.

14. 已知 x_1, x_2 是函数 $f(x) = 2\sin x + \cos x - m$ 在 $[0, \pi]$ 内的两个零点, 则 $\sin(x_1 + x_2) =$ _____.

15. (2025·湖北模拟) 已知 α, β 为锐角, 且 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, 则 $\tan \alpha$ 的最大值为 _____.

16. 设 α, β 是一个钝角三角形的两个锐角, 下列四个不等式中正确的是 ()

A. $\tan \alpha \tan \beta < 1$

B. $\sin \alpha + \sin \beta < \sqrt{2}$

C. $\cos \alpha + \cos \beta > 1$

D. $\frac{1}{2} \tan(\alpha + \beta) < \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$

题型三: 万能公式

17. 已知 α 为第四象限角, $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$, 则 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 的值为 ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{3}$





18. (2018·新课标III) 函数 $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$ 的最小正周期为 ()

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. π

D. 2π

19. 若 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $\sin \alpha + 2\cos \alpha = 2$, 则 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 等于 ()

A. 3

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

20. (2018·新课标 I) 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边上有两点 $A(1, a)$, $B(2, b)$, 且 $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$, 则 $|a - b| =$ ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. 1

21. 已知 $\sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 3\cos \alpha \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$ ()

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. -1

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



**题型四：正切恒等式**

22. (2025·徐州模拟) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\tan A + \tan B - \tan(A+B) = 2\tan A \tan B$, 则 $\cos^4 C - \sin^4 C =$ ()

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $-\frac{4}{5}$

D. $-\frac{3}{5}$

23. (2016·江苏) 在锐角三角形 ABC 中, 若 $\sin A = 2\sin B \sin C$, 则 $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值是 _____.

24. 已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $\sin A = \sin B \sin C$, 则下列结论中正确的是 ()

A. $\tan B + \tan C = \tan B \tan C$

B. $\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$

C. $1 < \tan A \leq \frac{4}{3}$

D. $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值为 4





 **作业**

1. (2020·新课标 I) 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $3\cos 2\alpha - 8\cos \alpha = 5$, 则 $\sin \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

2. (2007·海南) 若 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\cos \alpha + \sin \alpha$ 的值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

3. 若 $\tan \theta = -1$, 则 $\frac{\cos \theta (1 - \sin 2\theta)}{\sin \theta - \cos \theta}$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. -1 D. $-\frac{1}{3}$

4. $4\cos 50^\circ - \tan 40^\circ =$ _____.

5. 已知 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{2}) =$ _____.

