第9讲：三角函数公式化简＋题型拓展＋技巧衍生(2)

题型一：二倍角＋半角公式＋降幂公式＋三倍角公式

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \begin{cases} -2\sin^2\alpha \\ = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

总结：① 1和$\sin\theta$⇒凑完全平方　② 1和$\cos$用二倍角公式消1

赵礼显数学

第9讲：三角函数公式化简＋题型拓展＋技巧衍生(2)

题型一：二倍角＋半角公式＋降幂公式＋三倍角公式

三倍角：$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha) + (1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha$

$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin\alpha\cdot\left(\frac{3}{4}-\sin^2\alpha\right) = 4\sin\alpha\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\alpha\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\right)$

$= 4\sin\alpha\cdot(\sin 60^\circ+\sin\alpha)\cdot(\sin 60^\circ-\sin\alpha) = 4\sin\alpha\cdot 2\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$

$= 4\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha) = 4\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ+\alpha)$ 3角乎.

第9讲：三角函数公式化简＋题型拓展＋技巧衍生(2)

题型一：二倍角＋半角公式＋降幂公式＋三倍角公式

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cdot\cos\alpha - \sin 2\alpha\cdot\sin\alpha = (2\cos^2\alpha-1)\cdot\cos\alpha - 2\cos\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha)$$

$$= -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha = 4\cos\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha - \frac{3}{4}\right) = 4\cos\alpha\cdot\left(\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 4\cos\alpha\cdot(\cos\alpha+\cos 30^\circ)\cdot(\cos\alpha-\cos 30^\circ) = 4\cos\alpha\cdot 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)\cdot(-2)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)$$

$$= 4\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+30^\circ)\sin(30^\circ-\alpha) = 4\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ+\alpha)$$ 3角和

$$\therefore \tan 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{4\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ+\alpha)}{4\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ+\alpha)} = \tan(60^\circ-\alpha)\cdot\tan\alpha\cdot\tan(60^\circ+\alpha)$$

3角和

1. (2024 届九省联考) 已知 $\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right), \tan 2\theta = -4\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta + \sin 2\theta} =$ (　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta$

$$\frac{1+2\sin\theta\cdot\cos\theta}{2\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta} = \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{2\cos\theta\cdot(\cos\theta+\sin\theta)} = \frac{\sin\theta+\cos\theta}{2\cos\theta} = \frac{1}{2}(\tan\theta+1)$$

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = -4\cdot\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta} \Rightarrow \tan\theta = -2\cdot(1+\tan\theta)^2 = -2\tan^2\theta - 4\tan\theta - 2$$

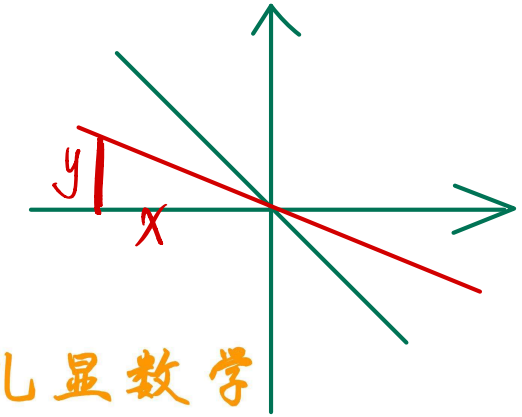
$$2\tan^2\theta + 5\tan\theta + 2 = 0$$

2×1

1×2

$\tan\theta = -2$ or $-\frac{1}{2}$

舍



赵礼显数学

2. (2023·新高考Ⅱ) 已知 α 为锐角，$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，则 $\sin\frac{\alpha}{2}=$（　　）

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$　　B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$　　C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$　　D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{8}=\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{\sqrt{5}^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot1+1}{16}$

$=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

赵礼显数学

3. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \_\_\_\_\_$.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$

$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot \dfrac{1}{2} \dfrac{\sin 160^\circ}{\sin 80^\circ} = \dfrac{1}{16}$

赵礼显数学

4. $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ =$ _____.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$

$= \sin 6^\circ \cdot \cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ$

$= \sin 6^\circ \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin 24^\circ}{\sin 12^\circ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 48^\circ}{\sin 24^\circ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 96^\circ}{\sin 48^\circ}$

$= \frac{2\sin 6^\circ \cdot \cos 6^\circ}{2 \cdot 8 \cdot \sin 12^\circ} = \frac{1}{16}$

法二：

$= \frac{2\cos 6^\circ \sin 6^\circ \cdot \cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ}{2 \cdot 2\cos 6^\circ \cdot 2\sin 12^\circ} = \frac{1}{16}$

赵礼显数学

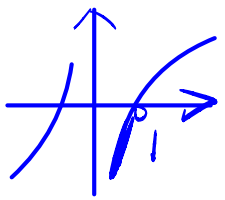
5. (2025·德阳模拟) 若关于 α 的方程 $\dfrac{\cos 2\alpha+1+m\sin 2\alpha}{m\cos 2\alpha+m-\sin 2\alpha}=\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上有且仅有一个实数解，则实数 $m=$ $\underline{\quad -2\sqrt{2} \quad}$.

$$\frac{2\cos^2\alpha-1+1+2m\cdot\sin\alpha\cos\alpha}{m\cdot(2\cos^2\alpha-1+1)-2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+m\sin\alpha}{m\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+m\tan\alpha}{m-\tan\alpha}=\tan^3\alpha$$

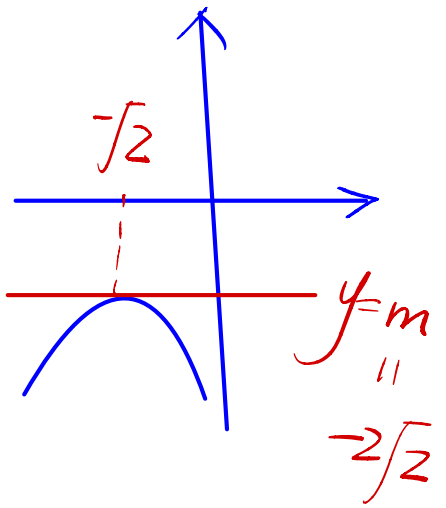
$$1+m\cdot\tan\alpha=m\cdot\tan^3\alpha-\tan^4\alpha$$

$$m=\frac{\tan^4\alpha+1}{\tan^3\alpha-\tan\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+\frac{1}{\tan^2\alpha}}{\tan\alpha-\frac{1}{\tan\alpha}}=\frac{x^2+2}{x}=x+\frac{2}{x}$$

令 $x=\tan\alpha-\dfrac{1}{\tan\alpha}=t-\dfrac{1}{t}\in(-\infty,0)$



$x^2=\tan^2\alpha+\dfrac{1}{\tan^2\alpha}-2$，$t=\tan\alpha\in(0,1)$



赵礼显数学

6. (2025·莆田模拟) 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，$2\sin\alpha+\cos\alpha=1$，则 $\dfrac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}=$ (　　)

$\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$

A. 3　　B. -3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

$2\sin\alpha=1-\cos\alpha$

$4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=1-(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2})=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$2\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\tan\frac{\alpha}{2}=2$

公式：$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

赵礼显数学

7. (2025·湖北模拟) 若 $\left(1+\cos\frac{2\pi}{5}\right)\sin x=\sin\frac{2\pi}{5}\cos x$，且 $x\in(0,\pi)$，则 $x=$（　　）

A. $\frac{\pi}{5}$　　B. $\frac{3\pi}{10}$　　C. $\frac{7\pi}{10}$　　D. $\frac{4\pi}{5}$

$$\tan x=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{1+\cos\frac{2\pi}{5}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{1+2\cos^2\frac{\pi}{5}-1}=\tan\frac{\pi}{5}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{5}$$

赵礼显数学

8.（2024•江西八校联考）已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$2(\sin\beta+\sin^2\beta)=\frac{\sin2\beta}{\tan\alpha}$，则 $\tan\left(2\alpha+\beta+\frac{\pi}{6}\right)=$（　　）

A. $-\sqrt{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

$$2\sin\beta\cdot(1+\sin\beta)=\frac{2\sin\beta\cdot\cos\beta}{\tan\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}=\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}{1+2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\Rightarrow2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

$$\tan120^\circ=-\sqrt{3}$$

赵礼显数学

9. 化简 $\dfrac{\cos 40^\circ}{\cos 25^\circ\sqrt{1-\sin 40^\circ}}$

解一：$\dfrac{\cos 40^\circ}{\cos 25^\circ\cdot\sqrt{1-\cos 50^\circ}} = \dfrac{\cos 40^\circ}{\sqrt{2}\sin 25^\circ\cdot\cos 25^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}\cos 40^\circ}{\sin 50^\circ} = \sqrt{2}$

（$1-\cos 50^\circ = 1-2\sin^2 25^\circ$）

解二：$\dfrac{\cos 40^\circ}{\cos 25^\circ\cdot\sqrt{1-2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}} = \dfrac{\cos 40^\circ}{\cos 25^\circ\cdot\sqrt{(\sin 20^\circ-\cos 20^\circ)^2}} = \dfrac{\cos 40^\circ}{\cos 25^\circ\cdot(\cos 20^\circ-\sin 20^\circ)}$

（$\cos 40^\circ = \cos^2 20^\circ-\sin^2 20^\circ$）

$= \dfrac{\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 25^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}\sin(20^\circ+45^\circ)}{\cos 25^\circ} = \sqrt{2}$

（异角转为同角）

赵礼显数学

10. 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}+\cos\alpha$，且 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$ 的值为 _____.

$$\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}\\ \cos\alpha+\sin\alpha=t>0\end{cases}$$

$$1+1+0=\frac{1}{4}+t^2$$

$$\Downarrow$$

$$t=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

赵礼显数学

11. 已知 $\tan x=a$，则 $\dfrac{3\sin x+\sin 3x}{3\cos x+\cos 3x}=$ _____.

$$\frac{3\sin x+3\sin x-4\sin^3 x}{3\cos x-3\cos x+4\cos^3 x}=\frac{6\sin x-4\sin^3 x}{4\cos^3 x}$$

$$=\frac{6\sin x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)-4\sin^3 x}{4\cos^3 x}=\frac{6\tan x\cdot(\tan^2 x+1)-4\tan^3 x}{4}=\frac{6a\cdot(a^2+1)-4a^3}{4}$$

$$=\frac{2a^3+6a}{4}$$

$$=\frac{a^3+3a}{2}.$$

赵礼显数学

题型二：辅助角公式

$$y=a\sin\omega x+b\cos\omega x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\sin\omega x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\omega x\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

（$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$，$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$）

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)\qquad \tan\varphi=\frac{b}{a}\qquad -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

我给b b2

$$y=3\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\qquad \tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\qquad \tan\varphi=\sqrt{3}$$

$$y=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=-\left(\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x\right)=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$y=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=2\left(\cos 2x\cdot\frac{1}{2}-\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

（$\tan\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$；$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$）

12. (2020• 新课标III) 已知 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，则 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=$（ B ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

法一：和差化差

法二：$\sin\theta+\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

$\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=1$

$\tan\varphi=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}$　　$\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$

赵礼显数学

13. (2013• 新课标Ⅰ) 设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$ _____.

$\max=\sqrt{5}$

$\sin\theta-2\cos\theta=\sqrt{5} \Rightarrow 2\sin\theta-4\cos\theta=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow 5\cos\theta=-2\sqrt{5} \Rightarrow \cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

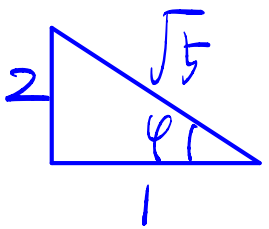
法一：对偶式：$\cos\theta+2\sin\theta=t=0$

$1+4+0=5+t^2\Rightarrow t=0$

法二：$\sin\theta-2\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta-\varphi)=\sqrt{5}$

$\tan\varphi=2$

$\sin(\theta-\varphi)=1$



$\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\theta=\varphi+\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow \cos\theta=\cos(\varphi+\frac{\pi}{2})=-\sin\varphi=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

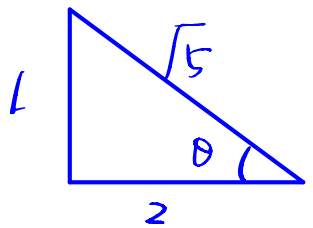
赵礼显数学

13. (2013• 新课标Ⅰ) 设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

设 $f'(x)=\cos x+2\sin x$

$f'(\theta)=\cos\theta+2\sin\theta=0$.

$\tan\theta=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



$\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ↓ min

$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ↓ max

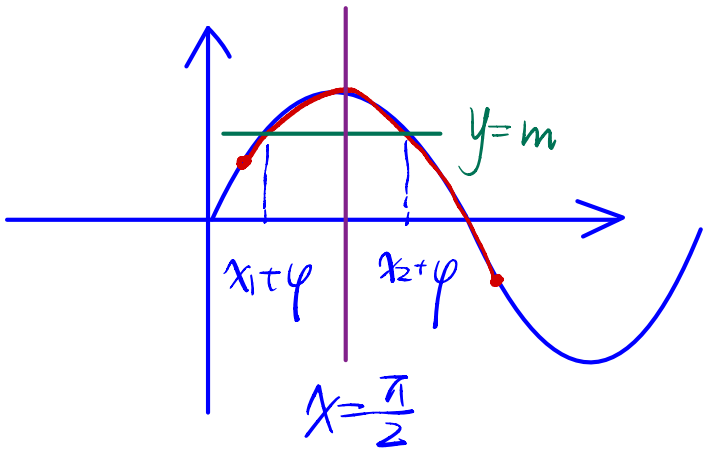
赵礼显数学

14. 已知 x_1，x_2 是函数 $f(x)=2\sin x+\cos x-m$ 在 $[0,\pi]$ 内的两个零点，则 $\sin(x_1+x_2)=$ _____.

$2\sin x+\cos x=m$

$\sqrt{5}\sin(x+\varphi)=m \quad \tan\varphi=\frac{1}{2}$

$\sqrt{5}\sin u=m. \quad u\in[\varphi,\pi+\varphi]$



$x_1+x_2+2\varphi=\pi \Rightarrow \sin(x_1+x_2)=\sin(\pi-2\varphi)=\sin 2\varphi=\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}$

$=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}.$

赵礼显数学

15. (2025·湖北模拟) 已知 α,β 为锐角，且 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$，则 $\tan\alpha$ 的最大值为 $\dfrac{4}{3}$.

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ 同除 $\cos\alpha$

$\tan\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta=\tan\alpha\cdot\dfrac{1}{\sin\beta}$

$\tan\alpha\cdot\sin\beta\cos\beta+\sin^2\beta=\tan\alpha$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin^2\beta}{1-\sin\beta\cos\beta}\overset{\text{齐一}}{=}\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\beta+\cos^2\beta-\sin\beta\cos\beta}=\dfrac{\tan^2\beta}{\tan^2\beta+1-\tan\beta}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{\tan^2\beta}-\frac{1}{\tan\beta}}$

$=\dfrac{1}{x^2-x+1}$ $x=\dfrac{1}{\tan\beta}>0$

$\dfrac{1}{\text{小}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}\Leftarrow x=\dfrac{1}{2}$ max: $\dfrac{4}{3}$

齐一: $\dfrac{\frac{1-\cos2\beta}{2}}{1-\frac{1}{2}\sin2\beta}=\dfrac{1-\cos2\beta}{2-\sin2\beta}=y$

$1-\cos2\beta=2y-y\sin2\beta\Rightarrow y\sin2\beta-\cos2\beta=2y-1$

$\sqrt{y^2+1}\sin(2\beta-\varphi)=2y-1$. $\left|\dfrac{2y-1}{\sqrt{y^2+1}}\right|\le1\Rightarrow4y^2-4y+1\le y^2+1\Rightarrow0\le y\le\dfrac{4}{3}$

当 $\beta=0$ 时 $y=0$ 小角不取0. $0<y\le\dfrac{4}{3}$.

赵礼显数学

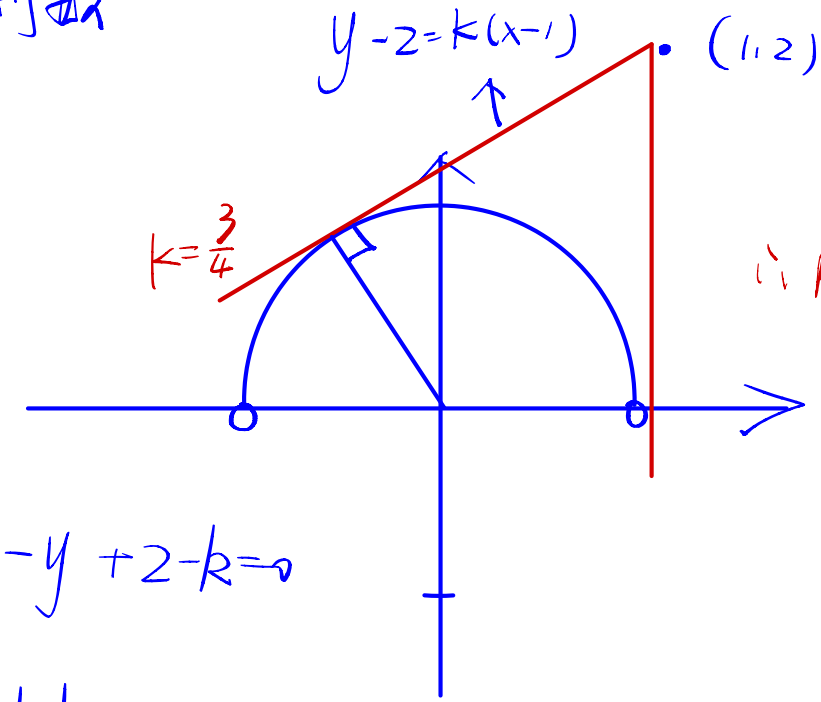
15. (2025·湖北模拟) 已知 α,β 为锐角，且 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$，则 $\tan\alpha$ 的最大值为 _____.

设 $k=\dfrac{1-\cos 2\beta}{2-\sin 2\beta}\Rightarrow k=\dfrac{2-\sin 2\beta}{1-\cos 2\beta}$

过 $(\cos 2\beta,\sin 2\beta)$，$(1,2)$ 两点的斜率.

单位圆上动点

斜率倒数



$0<2\beta<\pi$ 表示半圆

$\therefore k\in\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)\Rightarrow$ 原式范围 $\left(0,\dfrac{4}{3}\right]$

$(0,0)$ 到 $kx-y+2-k=0$

$d=\dfrac{|2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow 4+k^2-4k=k^2+1\Rightarrow k=\dfrac{3}{4}$

赵礼显数学

16. 设α,β是一个钝角三角形的两个锐角，下列四个不等式中正确的是（　　）

A. $\tan\alpha\tan\beta<1$　　B. $\sin\alpha+\sin\beta<\sqrt{2}$

C. $\cos\alpha+\cos\beta>1$　　D. $\frac{1}{2}\tan(\alpha+\beta)<\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$

$\beta<\frac{\pi}{2}-\alpha$

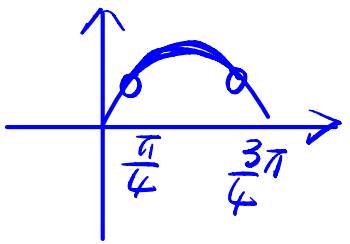
A. $\sin\alpha\sin\beta<\cos\alpha\cos\beta\Leftrightarrow\cos(\alpha+\beta)>0$

B: $\sin\alpha+\sin\beta<\sin\alpha+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\leq\sqrt{2}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

C: $\cos\alpha+\cos\beta>\cos\alpha+\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})>1$

$\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$



D: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}<\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\Rightarrow 1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}>1$ 矛盾

赵礼显数学

题型三：万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\qquad t=\tan\frac{\alpha}{2}$$

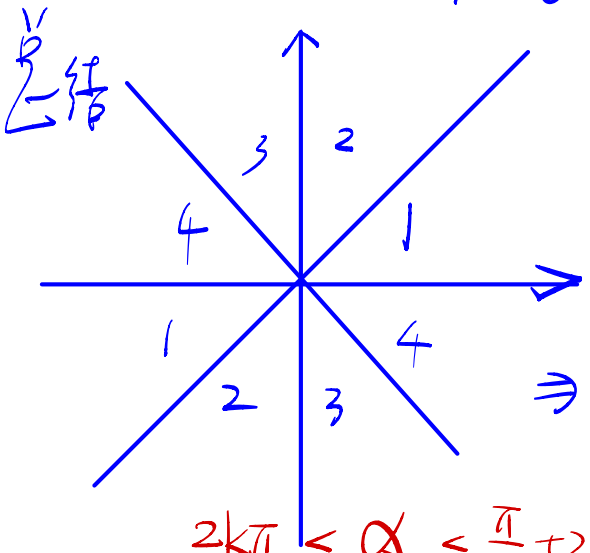
$$\cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

17. 已知 α 为第四象限角，$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值为（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

$$\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t+1-t^2}{1+t^2}=\frac{1}{5}$$



$\Rightarrow\alpha$ 是第四

$\Rightarrow\frac{\alpha}{2}$ 是第三、四象限

$2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi$

$10t+5-5t^2=1+t^2$

$6t^2-10t-4=0$

$3t^2-5t-2=0$

$3\quad 1$

$1\quad -2$

$t=-\frac{1}{3}$ or $t=2$

舍

赵礼显数学

18. (2018• 新课标III) 函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ 的最小正周期为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

$f(x)=\frac{1}{2}\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{2}\sin 2x$　　$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

赵礼显数学

19. 若 $\alpha \in (0, \pi)$，且 $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 2$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 等于（　　）

$=t$

A. 3　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

法一：$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2(1-\cos\alpha) = 2\left(1-1+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$

$\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

法二：$\frac{2t}{1+t^2} + 2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 \Rightarrow \frac{t+1-t^2}{1+t^2} = 1 \Rightarrow 1+t^2 = t+1-t^2$

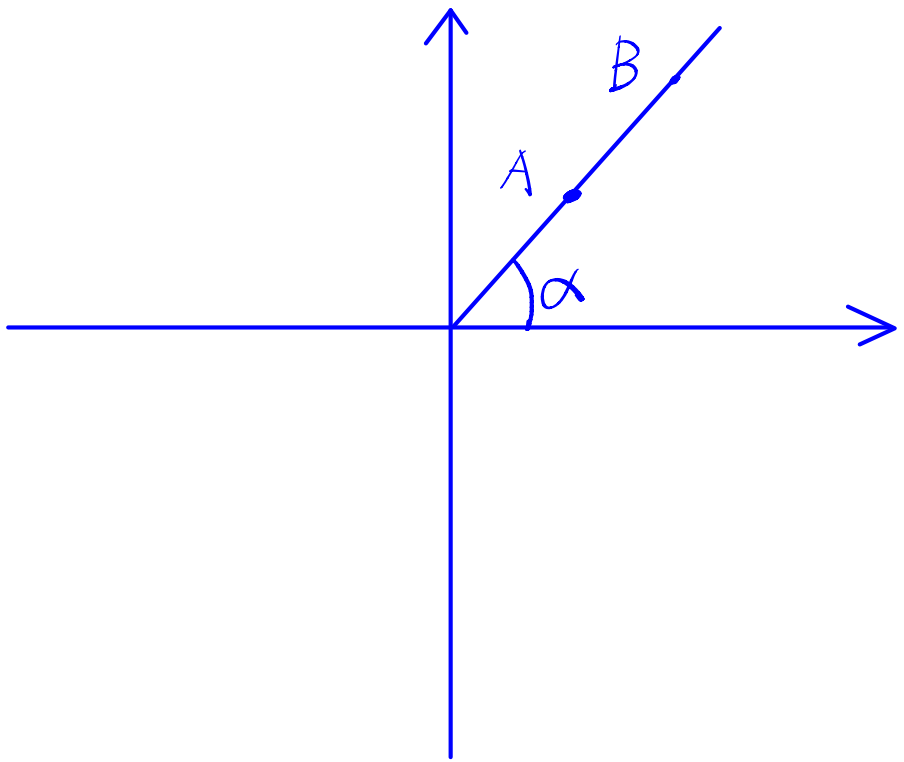
$\Rightarrow 2t^2 - t = 0 \Rightarrow t = 0$ or $t = \frac{1}{2}$

舍　　√

赵礼显数学

20. (2018• 新课标Ⅰ) 已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1,a)$，$B(2,b)$，且 $\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$，则 $|a-b|=$ （ $|\tan\alpha|$ ）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. 1



$k=\frac{b-a}{2-1}=\tan\alpha$

$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2}{3}$

$2\tan^2\alpha+2=3-3\tan^2\alpha$

$5\tan^2\alpha=1$

$\tan\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

赵礼显数学

21. 已知 $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=3\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. -1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})$

$\tan\alpha=3\tan(\alpha+\frac{\pi}{6})$

$\tan\left[(\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}\right]=3\tan(\alpha+\frac{\pi}{6})$

$\frac{t-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+t\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=3t$

$t-\frac{\sqrt{3}}{3}=3t+\sqrt{3}t^2$

$\sqrt{3}t^2+2t+\frac{\sqrt{3}}{3}=0$

$3t^2+2\sqrt{3}t+1=0\Rightarrow(\sqrt{3}t+1)^2=0\Rightarrow t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1-\tan^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}{1+\tan^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}$

$=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

公式：$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

赵礼显数学

题型四：正切恒等式

$A+B+C=k\pi$，$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$.

$\Rightarrow \quad A+B=k\pi-C \Rightarrow \tan(A+B)=\tan(k\pi-C)=-\tan C$

$$\Rightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=-\tan C$$

$$\Rightarrow \tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

$$\Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C.$$

22. (2025·徐州模拟) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 满足 $\tan A+\tan B-\tan(A+B)=2\tan A\tan B$，则 $\cos^4 C-\sin^4 C=$（ D ）

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

$\pi-C$

$\tan A+\tan B+\tan C=2\tan A\cdot\tan B$

$\tan C=2$

$$(\cos^2 C+\sin^2 C)\cdot(\cos^2 C-\sin^2 C)=\frac{\cos^2 C-\sin^2 C}{\cos^2 C+\sin^2 C}=\frac{1-\tan^2 C}{1+\tan^2 C}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}.$$

赵礼显数学

23. (2016·江苏) 在锐角三角形 ABC 中，若 $\sin A = 2\sin B\sin C$，则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是 _____.

$A=\pi-(B+C)$

$\sin(B+C)=2\sin B\sin C$

$\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\cdot\sin C$ 同除 $\cos B\cos C$

$\tan B+\tan C=2\tan B\cdot\tan C\geq 2\sqrt{\tan B\cdot\tan C}\Rightarrow \tan B\cdot\tan C\geq$

$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C=\tan A+\tan B+\tan C=\underset{a}{\tan A}+\underset{b}{2\tan B\cdot\tan C}\geq 2\sqrt{2\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}$

$\Rightarrow \tan A\tan B\cdot\tan C\geq 8$

当且仅当 $\tan A=2\tan B\cdot\tan C$ 时取等

$\tan A=4$

$2\tan B\cdot\tan C=4$

$\Downarrow$

$\tan B\cdot\tan C=2$ 时

赵礼显数学

24. 已知$\triangle ABC$为锐角三角形，且$\sin A=\sin B\sin C$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $\tan B+\tan C=\tan B\tan C$

B. $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$

C. $1<\tan A\leqslant\frac{4}{3}$

D. $\tan A\tan B\tan C$的最小值为4

$\sin(B+C)=\sin B\cdot\sin C$

$\sin B\cdot\cos C+\cos B\sin C=\sin B\cdot\sin C$

$\tan B+\tan C=\tan B\cdot\tan C\geq 2\sqrt{\tan B\cdot\tan C}$

$\tan B\cdot\tan C\geq 4$

D: $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$

$=\overset{\geq 2}{\tan A}+\overset{\geq 2}{\tan B\cdot\tan C}$ 基不等

$\geq 2\sqrt{\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}$

$\therefore \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geq 4$

$\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}=\frac{\tan B\cdot\tan C-1+1}{\tan B\cdot\tan C-1}=1+\frac{1}{\tan B\cdot\tan C-1}\in(1,\frac{4}{3}]$

D: $\tan A+\tan B+\tan C=1+\frac{1}{\tan B\cdot\tan C-1}+\tan B\cdot\tan C=1+\frac{1}{x}+x+1=x+\frac{1}{x}+2\geq 3+\frac{1}{3}+2$

$x=\tan B\cdot\tan C-1\geq 3$

$=5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$



赵礼显数学